

# Una propuesta para el mecanismo de subastas de distribución en el MIBEL

Julián Barquín\*

## Resumen

La motivación de este artículo es la posible realización de subastas de distribución en el futuro mercado ibérico de la electricidad (MIBEL). La actual ordenación de estas subastas es revisada y se propone un procedimiento apto para su implantación en el MIBEL, teniendo en cuenta la limitada capacidad de transporte entre España y Portugal.

*Palabras clave:* MIBEL, subastas de distribución.

*Códigos JEL:* D44, L94.

## 1. Introducción

La utilización de mecanismos de subastas para la compra de energía es la base esencial de los mercados eléctricos, y en particular del mercado eléctrico peninsular español. Sin embargo, el uso de mecanismos de subasta centralizada en el medio plazo (unos meses a unos años) para la provisión de la demanda a tarifa está mucho menos extendido.

Los mercados de energía eléctrica, aunque organizados de formas muy diferenciadas en los diversos sistemas donde se ha procedido a su implantación, negocian productos que cubren típicamente una gran amplitud de horizontes temporales. En el medio plazo que es de mayor interés en el contexto de esta propuesta son de particular relevancia los contratos a plazo negociados en OMIP, donde sin embargo el volumen de contratación es reducido. En lo referente a la Unión Europea existen contratos a plazo que se negocian en mercados organizados (Powernext, EEX, AEX, Belpex, Nordpool, ...) o no organizados; o que toman como subyacente contratos negociados en estos mercados. Existen instrumentos similares también en el resto del mundo. Sin embargo, se ha constatado que estos mercados son inadecuados o insuficientes para resolver ciertos problemas que se plantean con frecuencia, tales como el suministro a la tarifa regulada, a clientes con tarifas especiales por razones sociales o de otra índole, o el control eficaz del posible ejercicio de poder de mercado.

En el marco de la Unión Europea, los mecanismos de subasta más similares son las subastas de capacidad virtual (normalmente conocidos por sus siglas

---

\*Instituto de Investigación Tecnológica, Universidad Pontificia Comillas de Madrid, C/ Alberto Aguilera 25, 28015 Madrid. e-mail: [Julian.Barquin@iit.upcomillas.es](mailto:Julian.Barquin@iit.upcomillas.es).

en inglés: VPP, de *Virtual Power Purchases*) que se han puesto en vigor en varios Estados Miembros, como Francia<sup>1</sup>, Bélgica<sup>2</sup>, Dinamarca<sup>3</sup> y también, recientemente, en España. En estas subastas el mayor o los mayores operadores de los distintos sistemas subastan parte de su capacidad de generación a agentes de menor tamaño, lo que es de esperar que incremente la liquidez y presión competitiva en el mercado eléctrico.

El uso de subastas para el suministro de la demanda a tarifa ha sido menos discutido en el contexto europeo. Fuera de Europa, cabe destacar dos conjuntos de experiencias de gran valor:

- En Brasil, las empresas distribuidoras y los grandes consumidores han de contratar su demanda prevista con generadores. La regulación distingue entre la demanda liberalizada (típicamente grandes consumidores) y los consumidores cautivos. La demanda asociada a estos últimos para un período quinquenal es agregada por el gobierno, que ofrece contratos de suministro (Contratos de Comercialização de Energia no Ambiente Regulado) a los generadores. Los contratos son asignados de acuerdo a lo resultante en una subasta de precio descendente no estándar<sup>4</sup>.
- En los Estados Unidos, las comisiones de servicios públicos de varios estados en la región a la que se extiende el mercado eléctrico PJM han convocado subastas para la provisión de su demanda a tarifa (en particular, se han celebrado subastas en Illinois<sup>5</sup>, Maryland<sup>6</sup>, Delaware<sup>7</sup> y Nueva Jersey<sup>8</sup>). Las características particulares de cada subasta son diferentes en cada uno de los estados, pero en todos los casos se trata de subastas de precio descendente de duración anual. Las tarifas que paga la demanda regulada se establecen a partir de los resultados de dichas subastas.

La investigación que da pie a este artículo fue motivada por la introducción en España de subastas para el suministro a la demanda a tarifa, reguladas por la reciente Orden Ministerial ITC/400/2007 de 26 de febrero de 2007. Aunque dicha Orden no ha sido completamente desarrollada en las subastas realizadas posteriormente (por ejemplo, prevé dos productos “Carga base” y “Carga modulada”, habiéndose celebrado solamente subastas del primero) proporciona el marco legal español y parece haber servido de guía también al regulador portugués.

El resto de este artículo se organiza como sigue. La siguiente sección expone algunos aspectos teóricos relevantes relativos a la organización de subastas. La sección 3 describe críticamente las subastas de distribución en España celebradas

---

<sup>1</sup>Véase <http://www.edf.com/72338d/Home-fr/Capacity-auctions/>

<sup>2</sup>Véase <http://www.belpexvpp.be>

<sup>3</sup>Véase <http://www.dongenergyvpp.com>

<sup>4</sup>Véase Dutra y Menezes (2005)

<sup>5</sup>Véase <http://www.illinois-auction.com/>

<sup>6</sup>Véase <http://www.dgs.maryland.gov/press/pubs/index.htm>

<sup>7</sup>Véase <http://depsec.delaware.gov/electric.shtml>

<sup>8</sup>Véase <http://www.bpu.state.nj.us/home/home.shtml> y <http://www.bgs-auction.com/bgs.auction.overview.asp>

hasta el momento de escribir este artículo (noviembre de 2007). La sección 4 expone el mecanismo de subasta expuesto por Ausubel, Cramton y Milgrom, que es la base del mecanismo propuesto en este artículo para el MIBEL en la sección 5. Finalmente se establecen las conclusiones. En el apéndice se plantea un procedimiento alternativo.

## 2. Aspectos teóricos

La teoría de subastas es un campo que ha pasado recientemente de ser una rama menor y relativamente desconocida de la teoría económica a una de las partes de la misma sujeta a una investigación más activa. Una de las principales razones está en el proceso de liberalización de las industrias de red, y en particular las de telecomunicaciones y energía<sup>9</sup>. Estas subastas se caracterizan por ser:

- de múltiples unidades. En las subastas “clásicas” se subasta un único bien (un cuadro, por ejemplo). En las subastas eléctricas, aún en el caso de que subastara un único producto (por ejemplo, carga base) se hace en múltiples paquetes (por ejemplo, se divide la generación requerida en bandas de potencia constante de 50 MW durante tres meses).
- con acoplamientos entre sí. Por ejemplo, el coste de un generador que suministre determinadas cantidades de carga base y de carga modulada no es la suma de una función de coste de carga base y una de carga modulada, si no que es una función conjunta de ambas variables que no admite en general una descomposición simple, debido a la naturaleza de las restricciones de operación técnica que el generador afronta.

El empleo de subastas para este tipo de problemas es muy reciente (el caso del espectro de comunicaciones americano fue seguramente el primer ejemplo de estas características<sup>10</sup>) y, por este motivo, no existen desarrollos teóricos completos que permitan abordar el problema de forma plenamente satisfactoria. La mayoría de los resultados de la teoría clásica de subastas son difícilmente generalizables a este contexto y no existe un enfoque sistemático para abordar los nuevos factores de riesgo, distintos de los tradicionalmente considerados, que aparecen en este tipo de subastas.

En cualquier caso, existen resultados que muestran que hay procedimientos de subastas que pueden proporcionar asignaciones eficientes y transparentes en el caso de que los bienes que se subastan sean sustitutos. Este es el caso de las subastas de distribución eléctrica, en el que la carga base puede ser considerada un sustituto de la carga punta, o en el que productos que difieren en sus plazos de ejecución son sustitutos<sup>11</sup>.

---

<sup>9</sup>Para la evolución hasta 1999, véase Klemperer (1999) o Burguet (2000). A partir de esta fecha el ritmo de publicación se ha acelerado.

<sup>10</sup>Véase McAfee y McMillan (1996).

<sup>11</sup>Por ejemplo, véase Milgrom (2004).

Sin embargo, en el caso de que quisiera extender estos mecanismo al mercado ibérico, surgen problemas que requieren una cuidadosa atención. La razón estriba en la limitada capacidad de interconexión entre España y Portugal. Existen en principio dos posibilidades:

1. Ignorar completamente las restricciones de transporte en la subasta, En este caso las partes de los contratos bilaterales de compraventa resultantes de la subasta tendrían que asumir el riesgo de poder asegurarse la capacidad de transporte necesaria para la entrega (en el espíritu de la Orden, quizá podría concretarse este riesgo en la parte vendedora). El riesgo adicional sin duda incrementaría el precio de las ofertas y, por lo tanto el resultante de la subasta. En las condiciones concretas del sistema ibérico, este incremento podría ser especialmente significativo.
2. Considerar las limitaciones de transporte en la subasta, sea de forma implícita en el mecanismo de casación o explícitamente como un producto adicional (capacidad de transporte). En ambas hipótesis, aparecen productos complementarios. La teoría de subastas arroja soluciones menos satisfactorias en este caso, aunque se podría tratar con diseños similares a una subasta de precio descendente “estándar”.

Es de señalar que estos problemas ya están parcialmente presentes aunque las subastas se limiten a España, debido a la posible participación de agentes externos. No obstante, dado el peso relativamente pequeño de la energía proveniente de Francia<sup>12</sup> y los acuerdos contractuales actualmente en vigor, probablemente el problema no revista una gran importancia práctica.

El enfoque de este artículo es el del diseño de un mecanismo según el segundo enfoque, es decir, considerando los límites de transporte.

### **3. El posible marco general de las subastas de distribución en el MIBEL**

Ciertamente, el establecimiento de subastas de distribución comunes para el MIBEL requerirá un acuerdo de los reguladores de España y Portugal que todavía no se ha producido. De hecho ni siquiera se ha iniciado formalmente. Por otra parte, cabe esperar que las actuales subastas que están teniendo lugar tanto en España como en Portugal de alguna forma condicionen las posibles futuras subastas conjuntas. En este sentido, es de interés detenerse en el análisis de la Orden Ministerial ITC/400/2007 de 26 de febrero de 2007 que las regula.

#### **3.1. Estructura de la subasta**

La Orden establece que:

---

<sup>12</sup>Con Portugal el problema es posiblemente mucho menor debido a la existencia de EdP como contraparte muy dominante en aquel lado de la frontera.

*La energía a suministrar por cada vendedor será asignada a través de un procedimiento de subastas en el que, partiendo de una cantidad de energía a suministrar para el conjunto de los distribuidores del artículo 2 y de un precio de salida, se proceda a una reducción progresiva del precio hasta llegar al equilibrio entre oferta y demanda de energía.*

Es decir, la Orden establece que el procedimiento ha de ser una subasta de precio descendente<sup>13</sup>. Más aún, se establecen algunos requerimientos adicionales en el Anexo de la Orden, tales como:

- Debe existir una adecuada presión competitiva (*Si el número de sujetos calificados se considerase insuficiente o existiesen argumentos que indicasen una insuficiente presión competitiva, la entidad responsable de la ejecución, previa comunicación a la Comisión Nacional de Energía, declarará suspendida la subasta*).
- Precisa el sentido en que la subasta es descendente (*El precio de salida de la subasta será fijado de modo que sea superior al precio de cierre esperado,... El precio de cualquier producto no podrá incrementarse entre una ronda y la siguiente*).
- Establece limitaciones a la información que se suministrará a los agentes en el curso de la subasta (*La cantidad precisa de exceso de oferta en cada ronda y para cada producto se mantendrá confidencial*).
- Establece los criterios para la reducción del precio entre las sucesivas rondas (*La fórmula de reducción de precio entre rondas para cada producto se basará en el exceso de oferta en cada producto. Dicha fórmula será confidencial y podrá contener un elemento de aleatoriedad o discrecionalidad*).
- Establece que los distintos productos se subastarán simultáneamente, se realizará un cierre simultáneo en todos los productos, y se establece la necesidad de imponer restricciones a los cambios de cantidades ofertadas por los agentes en los distintos productos, lo que es necesario para poder garantizar la convergencia del procedimiento<sup>14</sup> (*Las subastas de productos de una misma duración se realizarán de forma simultánea, permitiéndose que los agentes trasladen oferta de un producto a otro entre rondas. La posibilidad de trasladar oferta de un producto a otro estará limitada ... Más adelante El cierre de la subasta se producirá para todos los productos en el mismo momento, cuando no exista exceso de oferta en ninguno de los productos objeto de la subasta*).

---

<sup>13</sup>El uso de subastas descendentes ha sido ampliamente discutido en el contexto de los mercados de energía eléctrica. En particular, han sido muy discutidas las reglas de Robert Wilson para el mercado diario de California (California PX). Una descripción de las reglas y, más significativamente, de las razones que las justifican que puede ser de gran relevancia en el presente contexto, se puede encontrar en Wilson (2001).

<sup>14</sup>También pueden ser relevantes consideraciones ligadas al posible comportamiento estratégico de los participantes. Por ejemplo, al no declarar interés por un cierto producto hasta una fase avanzada de la subasta, a fin de obtener un precio más alto del que sería posible de otra forma (en inglés, bastante gráficamente, *hiding like a snake in the grass*).

La Orden incluye algunas aclaraciones y recomendaciones adicionales. En conjunto, la propuesta es similar a la implementada en algunos estados de la zona de mercado de PJM. En este sentido, existe en el dominio público abundante información y experiencia acumulada por los agentes de la subasta que podría ser de interés analizar por parte de la entidad responsable de la subasta, las autoridades competentes y los agentes implicados<sup>15</sup>.

En cualquier caso, estos puntos motivan los siguientes comentarios:

1. La existencia de adecuada presión competitiva es, en efecto, de crucial importancia<sup>16</sup>. Puede valorarse a tenor de un cierto número de magnitudes, siendo las principales el número de agentes que se presentan a vender en la subasta y los volúmenes máximos por los que desean estos pujar. Las reglas de las subastas podrían establecer límites a indicadores basados en estas u otras magnitudes para que se pueda proceder a su celebración.
2. La Orden establece limitaciones a las cantidades por las que se pujan que se pueden transferir de un producto a otro. Es importante que las reglas adoptadas para este fin sean adecuadas a este objetivo y no sean innecesariamente complejas<sup>17</sup>.
3. La Orden no prevé el establecimiento de ningún precio de reserva. No obstante, podría ser conveniente el fijar dicha cantidad (como, por ejemplo, en las subastas brasileñas) a fin de reducir el riesgo de colusión y de comportamiento predatorio<sup>18</sup>. En este caso, el precio de salida debiera estar por encima, y posiblemente muy claramente por encima del de reserva, a fin de facilitar que los agentes tuvieran oportunidad de converger a una solución eficiente. Probablemente es también deseable que el precio de reserva se mantuviera confidencial, a fin de evitar la aparición de un “punto focal” que facilitara el comportamiento colusivo<sup>19</sup>. De hecho, las reglas de las subastas celebradas en España hasta el momento de escribir este artículo establecen un precio de reserva confidencial.

Una alternativa que puede tener efectos similares a los de establecer un precio de reserva, en el sentido de limitar los incentivos para el comportamiento colusivo, es la de proponer una curva de demanda elástica<sup>20</sup>.

---

<sup>15</sup>En particular, existe información abundante sobre fórmulas de descenso de precio y tiempos requeridos para la ejecución de la subasta.

<sup>16</sup>Por ejemplo, citando Klemperer (2003): *What really matters in practical auction design is robustness against collusion and attractiveness to entry-just as in ordinary industrial markets.*

<sup>17</sup>Por ejemplo, se ha argumentado que en las subastas de Nueva Jersey se llegó a una asignación menos eficiente de lo deseable de la energía contratada, debido a las dificultades causadas a los pujantes por un conjunto complejo de reglas de cambio de producto (switching rules).

<sup>18</sup>Véase Klemperer (2002)

<sup>19</sup>Por supuesto, para que un precio de reserva sea eficaz debe ser creíble, es decir, debe haber un compromiso real por parte de las compañías distribuidoras o del regulador a no admitir compras a cualquier precio”, aunque es posible que esto se viera como que el procedimiento “falló”.

<sup>20</sup>Véase McAdams (2002), donde el autor sugiere modificaciones a las reglas que simulan una demanda elástica.

Estas técnicas son particularmente interesantes si se prevé la celebración de subastas con productos que se solapan (por ejemplo, productos de 6 meses en la subasta de septiembre se solapan durante los últimos tres meses con productos trimestrales subastados en diciembre).

4. Para asegurar la existencia de suficiente presión competitiva, es necesario que la información que reciben los agentes del desarrollo de la subasta sea limitada<sup>21</sup>. Por ejemplo, en las subastas realizadas en España los ofertantes dejaron de recibir información sobre el exceso de oferta durante las últimas iteraciones.

### 3.2. Definición de los productos

La Orden incluye una definición de los productos objeto de la subasta:

1. Carga base: el vendedor se compromete a suministrar la energía equivalente a una potencia constante en todas las horas incluidas en el período de entrega definido en el contrato. La potencia correspondiente a cada vendedor será determinada mediante concurrencia según el procedimiento de la subasta.
2. Carga modulada: el vendedor se compromete a suministrar un porcentaje fijo aplicado a un volumen de energía equivalente a una potencia variable que será definida en el contrato tipo para cada período horario incluido a lo largo del período de entrega definido en el contrato. El porcentaje correspondiente a cada vendedor será determinado mediante concurrencia según el procedimiento de la subasta.

Esencialmente, los dos productos contemplados corresponden a franjas de energía constante (carga base) y energía suministrada con un perfil definido previamente a la subasta (carga modulada) durante el período de entrega. No obstante, la Orden no entra a detallar la definición precisa de estos productos. En particular:

- Aunque la Orden establece que las potencias de referencia que se usarán para la definición del producto “carga modulada” se calcularán a partir *de la mejor previsión de [las ...] curvas de carga correspondientes al período de entrega de cada subasta*, así como la curva de carga relativa al mismo período del año anterior al período de entrega de cada subasta entregadas

---

<sup>21</sup>Por ejemplo, en el informe que la consultora Charles River Associates realizó para la New Jersey Board of Public Utilities sobre las subastas de distribución en este estado, (PostAucRep\_FINAL\_APRIL8\_Redacted\_Blackout.pdf, disponible en <http://www.state.nj.us/bpu/wwwroot/energy/>) establece entre sus recomendaciones que: *We suggest that in future years NERA (la Entidad Responsable de la Subasta) and the EDCs (Electric Distribution Company) attempt to be more restrictive with regard to EDC access to sensitive information, both to minimize the likelihood of inadvertent inappropriate information sharing, and to reinforce the perception of the fact that significant measures are in place to ensure that information does not flow improperly from an EDC to its affiliates.*

por las empresas distribuidoras, no indica los detalles ni del procedimiento ni del resultado final esperado. Considerando dos extremos, el producto final podría ser un perfil diferenciado para cada hora del período, o un perfil estándar para cada semana que definiera unas ciertas horas valle y horas punta con dos valores de potencia de referencia. El primer caso se prestaría mejor a cubrir las necesidades de la demanda a tarifa, mientras que el segundo facilitaría la definición y venta de productos en mercados secundarios. También facilitaría, en el caso de subastas con productos de más de tres meses de período de entrega, el poder comprar los volúmenes requeridos en convocatorias sucesivas de las subastas. En cualquier caso, esta tensión entre adaptación y liquidez estará presente en el diseño final del producto.

- En principio, el comprador se compromete a nominar las cantidades adquiridas. Esto implica que en ocasiones las cantidades adquiridas serán insuficientes para cubrir su demanda a tarifa, o resultarán excesivas (por ejemplo, debido a errores de predicción). Por lo tanto, quizá fuera conveniente considerar la posibilidad de permitir desviaciones de consumo sobre los volúmenes adquiridos. El diseño de la regulación correspondiente deberá tener en cuenta el de los mercados de corto plazo, así como las características de, activos disponibles por, y regulación aplicable a los agentes que participan en las subastas y en estos mercados.

## 4. El mecanismo de subasta

### 4.1. La subasta híbrida de Ausubel, Cramton y Milgrom

El mecanismo de subasta que se propone está basado en las propuestas de Ausubel, Cramton y Milgrom (2006). Los autores proponen un mecanismo híbrido de dos fases. Revisaré dicho mecanismo, con ciertas adaptaciones adecuadas al caso que ocupa este artículo. El mecanismo de subasta está orientado a la compra simultánea de varios productos (por ejemplo, carga pico y carga modulada).

La primera fase de este mecanismo híbrido es una subasta descendente. Un subastador anuncia precios comenzando por precios muy altos, y obtiene como respuesta las cantidades ofertadas por cada agente. Realiza la agregación de las mismas. En aquellos productos en que la oferta agregada supere la demanda propone un nuevo precio inferior, de acuerdo al exceso de oferta. Esta fase termina cuando la oferta agregada es inferior a la demanda para cada producto.

La segunda fase es una subasta “proxy”, donde agentes “proxy” envían ofertas de generación (de acuerdo con funciones de coste suministradas por los agentes) al subastador, que las va seleccionando con el criterio de minimizar los pagos. La fase continua hasta que ningún agente quiere enviar ofertas adicionales.

Ausubel, Cramton y Milgrom defienden su mecanismo basándose principalmente en tres razones. Quizá la más relevante para los propósitos de este

artículo sea la tercera: el éxito de las subastas descendentes en mercados de energía eléctrica. Es en esta fase en la que se centrará el resto de este artículo. No obstante, en las conclusiones se harán algunos comentarios sobre la posible conveniencia de una fase “proxy”.

La subasta descendente que proponen estos autores tiene dos características, dos reglas de actividad, que son de fundamental importancia en lo que sigue. La primera es que las ofertas son firmes. Es decir, si el subastador propone un vector de precios  $p$ , cada agente  $i$  propone un vector de ofertas  $x_i(p)$  que permanece en vigor durante toda la subasta<sup>22</sup>.

La segunda condición es una generalización de la regla de actividad que en subastas de un único producto exige que la cantidad ofertada disminuya con el precio. En este tipo de subastas, la regla (casi) garantiza que la subasta finaliza: el precio va bajando hasta que la oferta iguala a la demanda<sup>23</sup>. La generalización se basa en un razonamiento que conviene revisar con cierto detenimiento.

Sea  $C_i(x_i)$  el coste para que el agente  $i$  supone suministrar la demanda  $x_i$ . Este coste no es, por supuesto, solamente el coste de operación si no que también incluye cosas como el coste de oportunidad de comprometer los recursos necesarios en esta subasta en vez de en mercados posteriores. Consideremos las ofertas realizadas para dos precios determinados  $p$  y  $p'$ . Un agente sincero prefiere producir  $x_i(p)$  a  $x_i(p')$  cuando el precio es  $p$ . En otras palabras, su beneficio (ingreso menos coste) es mayor en el primer caso que en el segundo:

$$p \cdot x_i(p) - C_i(x_i(p)) \geq p \cdot x_i(p') - C_i(x_i(p')) \quad (1)$$

Análogamente, prefiere  $x_i(p')$  a  $x_i(p)$  cuando el precio es  $p'$ :

$$p' \cdot x_i(p') - C_i(x_i(p')) \geq p' \cdot x_i(p) - C_i(x_i(p)) \quad (2)$$

Restando ambas desigualdades se obtiene la que denominan “regla de actividad de preferencia revelada”:

$$(p - p') \cdot (x_i(p) - x_i(p')) \geq 0 \quad (3)$$

En el caso de un solo producto, la regla se reduce a que la cantidad ofertada se incrementa en el precio. Es, sin embargo, menos restrictiva que regla que (en vigor en algunas subastas) exige que la oferta de todos los productos sean funciones monótonas de sus precios, ya que permite transferir parcialmente ofertas en un producto a otros. Sin embargo, evita agregar cantidades de diferentes productos para limitar estas transferencias, como se establece en otros modelos de subasta alternativos.

<sup>22</sup>De hecho, es esta regla de actividad la que posibilita escribir  $x_i(p)$ . Si las cantidades ofertadas para unos mismos precios pudieran cambiar en momentos diferentes de la subasta,  $x_i$  no se podría modelar como una función de  $p$  si no quizá como algo más exótico (una función multivaluada, un funcional ...)

<sup>23</sup>Discontinuidades de la función de oferta con respecto al precio pueden provocar la aparición de situaciones “extrañas” que requieran de reglas adicionales. Para no complicar la discusión no se considerarán estos temas en el contexto de la propuesta de este artículo, ya que la discusión sería en muy similar a la que se tiene en otros mecanismos de subasta.

## 4.2. Discusión de la propuesta de Ausubel, Cramton y Milgrom

Desde el punto de vista matemático, (3) establece que el operador  $x_i(p)$  es monótono, y que por lo tanto también lo es el operador de la oferta agregada  $x(p) = \sum_i x_i(p)$ . En el caso de un solo producto, esto implica que cada operador  $x_i(p)$  debe ser el subgradiente de una “función de coste” convexa, que podemos denotar  $\tilde{C}_i(x_i)$ . Es decir

$$p(x_i) = \frac{\partial \tilde{C}_i(x_i)}{\partial p} \quad (4)$$

Si la función de coste de cada agente fuera de hecho convexa, y se tratara de un mercado perfecto, argumentos microeconómicos estándares llevarían a que los agentes ofertarían sus costes marginales, es decir

$$\tilde{C}_i(x_i) = C_i(x_i) \quad (5)$$

Sin embargo, desde el punto de vista de diseño del mecanismo de subasta, lo importante son las propiedades de  $x_i(p)$ , o equivalentemente de  $\tilde{C}_i(x_i)$ . Como estas funciones son convexas, el problema de casar el mercado es equivalente al de resolver

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_i \tilde{C}_i(x_i) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_i x_i = d \end{aligned} \quad (6)$$

siendo  $d$  la cantidad total del producto que se demanda.

El problema (6) es un problema convexo con función objetivo separable. Esto sugiere el uso de técnicas como la relajación lagrangiana. En este tipo de algoritmos hay dos puntos fundamentales a considerar:

1. En cada iteración  $k$  se propone un precio  $p^k$ . Las cantidades  $x_i^k$  se determinarían a partir del subgradiente de  $\tilde{C}_i(x_i)$ :

$$x_i^k = \text{sol} \left. \frac{\partial \tilde{C}_i(x_i)}{\partial x_i} = p^k \right| \quad (7)$$

Es decir  $x_i^k = x_i(p^k)$ . Lo que significa que los subproblemas se “resuelven” enviando una propuesta de precios a los agentes que devuelven su propuesta de cantidades. La restricción (3) garantiza que en efecto es como si resolvieran un subproblema de optimización convexo.

2. Si  $\sum_i x_i$  es significativamente distinto de  $d$  proponer un nuevo precio. La regla estándar es hacerlo de acuerdo con el valor del hueco de dualidad, es decir, según la regla

$$p^{k+1} = p^k - \alpha^k \left( \sum_i x_i^k - d \right)$$

Es interesante que es este tipo de regla el que se suele emplear en subastas reales. Por otra parte, la rica teoría de optimización existente puede guiar la selección de la constante  $\alpha^k$  más adecuada.

En suma, existe una correspondencia entre las reglas de la subasta y un problema de optimización asociado, lo que proporciona una guía para la elaboración de las reglas de la subasta.

## 5. Generalizando el procedimiento

Lamentablemente, cuando hay más de un producto la condición de monotonía no es suficiente para garantizar la existencia de una función convexa de la que se puedan derivar las ofertas. Existen dos alternativas para resolver este problema:

1. Substituir la regla de actividad (3) por otra que garantice la existencia de esta función.
2. Buscar inspiración para el desarrollo de los mecanismos de subasta no en la teoría de optimización, si no en la teoría de desigualdades variacionales que incorpora de forma natural estos requerimientos.

En esta sección se tratará la segunda posibilidad, ya que se considera que la regla (3) es muy natural y que una solución satisfactoria es posible dentro del marco de la teoría de desigualdades variacionales. No obstante, se explorará también la primera alternativa en el apéndice.

El enfoque general se basa en un sistema de subasta implícito. Existe una serie de productos demandados en cada sistema. Algunos de estas demandas pueden ser nulas. Por ejemplo, hay productos que puede ser definido a partir de la demanda de carga modulada para los consumidores portugueses, que puede tener un perfil distinto de la que requieren los consumidores españoles. Entonces se podrían definir dos productos: carga modulada portuguesa inyectada en Portugal y carga modulada portuguesa inyectada en España. El segundo producto tendría una demanda nula. Las cantidades demandadas se ordenan en un vector  $d$ .

Cada agente  $i$  puede realizar ofertas  $x_i(p)$  para cada producto dado un vector de precios  $p$ . Es posible que para algún o algunos productos decida no ofertar nada, en cuyo caso la componente correspondiente del vector  $x_i(p)$  será 0. En cualquier caso, la función  $x_i(p)$  ha de ser monótona. Es decir, las ofertas son firmes y se ha de cumplir regla de actividad de preferencia revelada:

$$(p - p') \cdot (x_i(p) - x_i(p')) \geq 0, \forall i, p, p' \quad (8)$$

Finalmente, se definen los flujos de productos por la interconexión  $I$  como, por ejemplo, la diferencia entre la demanda de demanda y oferta de un tipo de producto entre España y Portugal. Así, el flujo de carga modulada portuguesa

es demanda de carga modulada portuguesa en España (posiblemente cero) menos oferta agregada de carga modulada portuguesa ofertada en España menos demanda de carga modulada portuguesa en Portugal más oferta agregada de carga modulada portuguesa ofertada en Portugal. El vector  $I$  se puede escribir entonces como

$$I = A \left( \sum_i x_i - d \right) \quad (9)$$

siendo  $A$  es una matriz constante cuyos elementos son 0, 1 o  $-1$ , que en ingeniería eléctrica se conoce como matriz de incidencias nudos-ramas.

Por otra parte, existen limitaciones de transporte debido a la capacidad finita entre España y Portugal. Dichas limitaciones podrían establecer mediante restricciones lineales sobre los flujos. Por ejemplo, supongamos que la subasta es de productos mensuales y que una unidad de cada producto equivale a 720 MW-h. Entonces una flujo de 720 MW-h de carga base en un mes dado implica un flujo de 1 MW por hora por la interconexión (dado que el mes tiene 720 horas). Por su parte un flujo de 720 MW-h de carga modulada española puede suponer un flujo de, digamos, 2 MW a las 20 horas y de 0.5 a las 4 horas los días laborables. Denotemos a estos perfiles, que son constantes dada la definición de los productos, como un vector  $f_h$ , en principio diferente para cada hora del mes. Si las capacidades de transporte en cada sentido (España-Portugal y Portugal-España) son respectivamente para cada hora  $\underline{I}_h$  e  $\bar{I}_h$  se ha de cumplir una restricción que se puede escribir como

$$\underline{I}_h \leq f_h \cdot I \leq \bar{I}_h \quad \forall h \quad (10)$$

Por otra parte, se puede definir un precio de transporte para cada clase de producto  $\mu$  como la diferencia de los precios de dichas clases en España y Portugal. Es decir, el precio de transporte de la carga modulada portuguesa es la diferencia entre el precio de carga modulada portuguesa en España menos el precio de carga modulada portuguesa en Portugal. Matemáticamente

$$\mu = Ap \quad (11)$$

Puede ser conveniente escribir  $\mu$  como la resta de dos cantidades no negativas:

$$\mu = \underline{\mu} - \bar{\mu}, \quad \underline{\mu}, \bar{\mu} \geq 0 \quad (12)$$

Luego

$$\underline{\mu} - \bar{\mu} = Ap \quad (13)$$

El problema del subastador tiene dos partes. Por un lado debe determinar precios  $p$  y flujos  $I$  tales que la suma de la oferta agregada en cada país más las importaciones menos las exportaciones cubra la demanda de cada producto, es decir

$$\sum_i x_i(p) - d - A^T I = 0 \quad (14)$$

donde  $A^T$  es la transpuesta de la matriz de incidencias.

Por otra parte, el precio del transporte debe ser nulo si la capacidad de transporte no es limitativa.

Para plantear la subasta como un problema variacional definamos la función exceso de oferta  $e(p)$  como

$$e(p) = \sum_i x_i(p) - d \quad (15)$$

Entonces, se debe cumplir

- Equilibrio demanda-oferta

$$e(p) = A^T I \quad (16)$$

- Condición de arbitraje del precio del transporte

$$\underline{\mu} - \bar{\mu} = Ap \quad (17)$$

- Restricciones de transporte

$$\underline{I} \leq f \cdot I \leq \bar{I} \quad (18)$$

- Si la desigualdad anterior no es vinculante,  $\mu = 0$ .

Definamos pues el vector de variables  $v$ :

$$v = \begin{bmatrix} p \\ \underline{\mu} \\ \bar{\mu} \\ I \end{bmatrix} \quad (19)$$

Asimismo, definamos el operador  $F(v)$ :

$$F(v) = \begin{bmatrix} e(p) - A^T I \\ I \\ -I \\ Ap - \underline{\mu} + \bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (20)$$

También definimos el conjunto de factibilidad  $\mathcal{T}$  que recoge las restricciones de transporte (10) y (12):

$$\mathcal{T} = \{(p, \underline{\mu}, \bar{\mu}, I) / \underline{I}_h \leq f_h \cdot I \leq \bar{I}_h, \underline{\mu}, \bar{\mu} \geq 0\} \quad (21)$$

Consideremos entonces el problema variacional VI( $F, \mathcal{T}$ ) definido como:

**Problema de subasta:** Encontrar  $v^* \in \mathcal{T}$  tal que  $F(v^*) \cdot (v - v^*) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{T}$ .

Este problema tiene solución si el conjunto de restricciones  $\mathcal{T}$  es convexo y el operador  $F$  es monótono (Harker y Pang (1990)). La convexidad de  $\mathcal{T}$  es evidente. En cuanto a la monotonía de  $F$ , la regla de preferencia relevada asegura que cada  $x_i(p)$  es monótona. Por tanto, lo es también el exceso de demanda  $e(p) = \sum_i x_i(p) - d$ . Con ello es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
& (F(v) - F(v')) \cdot (v - v') & = \\
& (e(p) - e(p')) \cdot (p - p') - (A^T I - A^T I') \cdot (p - p') \\
& + (I - I') \cdot (\underline{\mu} - \underline{\mu}') \\
& - (I - I') \cdot (\bar{\mu} - \bar{\mu}') & (22) \\
& + (Ap - Ap') \cdot (I - I') - (\underline{\mu} - \underline{\mu}') \cdot (I - I') + (\bar{\mu} - \bar{\mu}') \cdot (I - I') & = \\
& (e(p) - e(p')) \cdot (p - p') & \geq 0
\end{aligned}$$

Adicionalmente, en la solución el vector de precios no está acotado, lo que significa que se ha de verificar que la componente asociada de  $F$ , es decir,  $e(p^*) - A^T I^*$  ha de anularse. En efecto, si alguna componente fuera positiva un vector  $v$  igual a  $v^*$  pero con el precio correspondiente a la componente no nula menor que  $p^*$  verificaría  $F(v^*) \cdot (v - v^*) < 0$ . Un argumento análogo se puede proporcionar si la componente fuera negativa.

Argumentos análogos se pueden emplear para analizar los precios de transporte. Si es factible que, dentro de  $\mathcal{T}$ , se cumpla que  $I > I^*$ , entonces  $\underline{\mu} = 0$  por un argumento similar al del párrafo anterior. Si en cambio se pudiera dar  $I < I^*$ , entonces  $\bar{\mu} = 0$ . Si ocurren ambas cosas, entonces  $Ap - \underline{\mu} + \bar{\mu} = Ap = 0$ . Es decir, se igualan los precios de productos análogos en los dos países.

De manera análoga al caso de un solo producto, se puede recurrir ahora a la teoría de desigualdades variacionales para sugerir mecanismos de subasta. Una posibilidad es aplicar, en vez de relajación lagrangiana, el algoritmo de Khobotov (o de la doble proyección, Khobotov (1987)). Cada iteración de la subasta sería como sigue:

1. Solicítense para un vector de precios  $p^k$  ofertas a los agentes  $x_i(p^k)$  que cumplan con la regla de preferencia revelada (equivalentemente, que garanticen que el operador  $x_i(p)$  es monótono).
2. Fórmese el vector  $v^k = [p^k, \underline{\mu}^k, \bar{\mu}^k, I^k]^T$ .
3. Calcúlese el exceso de oferta  $e^k = \sum_i x_i(p^k) - d$ .
4. Calcúlese el valor  $F^k = [e^k - A^T I^k, I^k, -I^k, Ap^k - \underline{\mu}^k + \bar{\mu}^k]^T$ .
5. Calcúlese el nuevo vector de variables  $\tilde{v}^k$  como

$$\tilde{v}^k = \text{Proy}_{\mathcal{T}} [v^k - \alpha^k F^k] \quad (23)$$

siendo  $\text{Proy}_{\mathcal{T}}$  la proyección sobre  $\mathcal{T}$ , y  $\alpha^k$  una constante juiciosamente escogida.

6. Solicítense para el nuevo vector de precios  $\tilde{p}^k$  ofertas a los agentes  $x_i(\tilde{p}^k)$  que cumplan con la regla de preferencia revelada.
7. Calcúlese  $\tilde{e}^k$  y  $\tilde{F}^k$ .
8. Calcúlese ahora

$$v^{k+1} = \text{Proy}_{\mathcal{T}} \left[ v^k - \alpha^k \tilde{F}^k \right] \quad (24)$$

9. Compruébese la convergencia, y si no se ha alcanzado hágase  $k \leftarrow k + 1$  y vuélvase al primer paso.

Nótese que como en el caso de un solo producto la actualización de precios es proporcional al exceso de oferta. Inicialmente puede establecerse a un valor muy alto al precio de los diferentes productos, y nulo al valor de los flujos y de los precios  $\bar{\mu}$ ,  $\underline{\mu}$  y a los flujos  $I$ . La teoría ya existente puede proporcionar valores razonables para las constantes  $\alpha^k$  (Marcotte (1991)), aunque puede ser más difícil que en el caso de un solo producto evitar oscilaciones (es decir, que el precio de algún producto suba en vez de bajar en alguna iteración). No obstante, la monotonía de  $F$  garantiza la convergencia del algoritmo.

## 6. Conclusión

Si se aplicara la propuesta de este artículo, quedarían una serie de temas todavía por tratar. Específicamente

- El mecanismo propuesto generaliza la fase de subasta descendente. Como en este caso, esta fase finalizaría cuando se alcanzara una determinada tolerancia, pudiéndose o no lanzar entonces la fase proxy. En cualquier caso, esta fase podría resultar recomendable debido a la naturaleza posiblemente no convexa de las funciones de costes de producción.
- Una vez finalizado el proceso, es preciso bilateralizar las ofertas aceptadas. Ello se puede hacer con criterios similares a los actualmente empleados, aunque quizá habría de explorarse la conveniencia de un mecanismo más estándar, especialmente desde el punto de vista de gestión de garantías, como una cámara de compensación. Adicionalmente es preciso otorgar los derechos de transporte a los agentes que deban exportar o importar los productos aceptados. No parece que esto revista dificultades especiales.

Por último, quizá sea interesante señalar que el mecanismo propuesto es fácilmente generalizable a redes representables mediante conjuntos de restricciones convexos, tales como la representación DC o mediante factores de distribución, habituales para redes malladas.

## Referencias

- [Ausubel, Cramton y Milgrom (2006)] Ausubel, Lawrence M., Peter Cramton y Paul Milgrom, “The Clock-Proxy Auction: A Practical Combinatorial Auction Design” in Peter Cramton, Yoav Shoham, and Richard Steinberg (eds.), *Combinatorial Auctions*, Chapter 5, 115-138, MIT Press, 2006.
- [Burguet (2000)] Burguet, Roberto, “Auction Theory: a guided tour”, *Investigaciones Económicas*, XXIV, 1, 2000.
- [Dutra y Menezes (2005)] Dutra, Joisa y Flavio Menezes, “Electricity Auctions in Brazil”. Disponible en <http://ssrn.com/abstract=790924>.
- [Harker y Pang (1990)] Harker, Patrick T. y Jong-Shi Pang, “Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementary problems: a survey of theory, algorithms and applications”, *Mathematical Programming* 48, pp. 161-220.
- [Khobotov (1987)] Khobotov, E. N., “Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems”, *U.S.S.R. Comput. Math. Phys.*, 27, pp. 120-127.
- [Klemperer (1999)] Klemperer, Paul, “Auction Theory: A Guide to the Literature”, *Journal of Economic Surveys*, 13(3), pp. 227-86, July 1999.
- [Klemperer (2002)] Klemperer, Paul, “What Really Matters in Auction Design”, *Journal of Economic Perspectives*, 2002.
- [Klemperer (2003)] Klemperer, Paul, “Using and Abusing Economic Theory”, *Journal of the European Economic Association*, 2003, 1, pp. 272-30
- [Marcotte (1991)] Marcotte, Patrice, “Application of Khobotov’s algorithm to variational inequalities and network equilibrium problems”, *INFOR* 29(4), pp. 258-270.
- [McAdams (2002)] McAdams, David, “Modifying the Uniform Price Auction to Eliminate Collusive Seeming Equilibria”, disponible en <http://www.mit.edu/mcadams/papers/uniform/mupa.pdf>
- [McAfee y McMillan (1996)] McAfee, R. Preston, y John McMillan, “Analyzing the airwaves auction”, *Journal of Economic Perspectives* 10(1), pp. 159-175. Winter 1996.
- [Milgrom (2004)] Milgrom, Paul, “Putting Auction Theory to Work”, pp. 268 y siguientes. Cambridge University Press, 2004.
- [Wilson (2001)] Wilson, Robert, “Activity Rules for An Iterated Double Auction” *Game Theory and Business Applications*, eds. K. Chatterjee y W. F. Samuelson, Springer, 2001.

## A. La subasta aplicando teoría de optimización

En este apéndice se explora la segunda posibilidad mencionada al comienzo de la sección 5, es decir, substituir la regla de actividad (3) por otra que garantice la existencia de funciones convexas de las que se puedan derivar las ofertas de los agentes según la regla del subgradiente, es decir,

$$x_i^k = \text{sol} \left. \frac{\partial \tilde{C}_i(x_i)}{\partial p} \right|_{p=p^k} \quad (25)$$

Para discutir la nueva regla que se propone, es útil introducir el dual de Legendre, definido como:

$$\tilde{B}_i(p) = \underset{x_i}{\text{máx}} p \cdot x_i - \tilde{C}_i(x_i) \quad (26)$$

que económicamente es una función de beneficio.  $\tilde{B}_i(p)$  es una función convexa de  $p$ . Más aún, (25) se verifica si y solo si

$$p \cdot x_i = \tilde{B}_i(p) + \tilde{C}_i(x_i) \quad (27)$$

Por tanto, se propone modificar la regla de preferencia revelada por la siguiente. Un conjunto de ofertas  $x_i^1 = x_i^1(p^1), \dots, x_i^K = x_i^K(p^K)$  es admisible si y solamente si el conjunto de restricciones

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i^k &\geq \tilde{B}_i^l + x_i^k (p^k - p^l) \\ \tilde{C}_i^k &\geq \tilde{C}_i^l + p^k (x_i^k - x_i^l) \\ p^k \cdot x_i^k &= \tilde{B}_i^k + \tilde{C}_i^k, \quad \forall i, \forall k, l = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (28)$$

es compatible. Es decir, un conjunto de ofertas solamente es válido si se encuentran cantidades  $\tilde{B}_i^k, \tilde{C}_i^k$  que verifiquen las restricciones anteriores. Siendo un conjunto de restricciones lineales, el problema es en principio soluble. Con más detalle, el número de variables es dos veces el número de productos por el número de iteraciones de la subasta. No parece que sea un problema intratable ni de lejos, pero el problema de satisfacibilidad no parece prestarse de forma natural a una resolución recursiva, como si lo hace la exigencia de monotonía del operador de oferta (lo qué es quizá uno de sus mayores atractivos). Tampoco parece tener una justificación tan intuitiva como la regla de preferencia revelada.

No obstante, si se utiliza, se puede emplear un mecanismo de subasta análogo a la relajación lagrangiana, como el desarrollado para un solo producto.